Übung 4: Graphalgorithmen

Aufgabe 4-1:

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Zeigen Sie folgende Aussagen:

1. Die Summe aller Knotengrade beträgt $2 \cdot |E|$, oder mathematisch ausgedrückt:
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$
2. Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Knotengrad in Graph G ist eine gerade Zahl.
3. Graph G hat mindestens zwei Knoten, die denselben Knotengrad haben, falls $|V| \geq 2$ ist.
4. Wenn G nicht zusammenhängend ist, dann ist der komplementäre Graph $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit $\overline{E} := \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$ zusammenhängend.

Aufgabe 4-2:

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt regulär vom Grad k oder k-regulär, wenn jeder Knoten $v \in V$ den Knotengrad k hat, also $\deg(v) = k$ gilt. Zeigen Sie folgende Aussagen:

1. Die Anzahl der Knoten in einem 3-regulären Graphen ist eine gerade Zahl.
2. Für jedes gerade $n \geq 4$ gibt es einen zusammenhängenden 3-regulären Graphen mit n Knoten.

Aufgabe 4-3:

Geben Sie die Adjazenzmatrix und die Adjazenzliste für den Graphen aus Abbildung 1 an. Führen Sie außerdem auf dem Graphen eine Tiefensuche aus.

- Geben Sie in jedem Schritt die Kanten an, die aktuell während der rekursiven Ausführung des Algorithmus noch bearbeitet werden müssen und von einem bereits besuchten Knoten ausgehen.
- Die von einem aktuell besuchten Knoten ausgehenden Kanten sollen in lexikographischer Reihenfolge der Bezeichner ihrer Endknoten besucht werden.
- Teilen Sie die Kanten anhand der dfb- und dfe-Nummern in Baum-, Vorwärts-, Rückwärts- und Querkanten auf.
- Die Suche soll bei Knoten a starten.

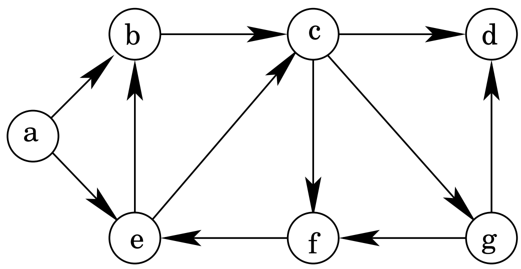

Abbildung 1: Tiefen- und Breitensuche

Aufgabe 4-4:

Bei einer Tiefensuche auf gerichteten Graphen unterscheiden wir Baum-, Vorwärts-, Rückwärts- und Querkanten. Welche dieser Kantenarten gibt es bei einer Tiefensuche auf ungerichteten Graphen nicht?

Aufgabe 4-5:

Geben Sie eine untere Schranke für die Anzahl verschiedener, minimaler Spannbäume für den folgenden Graphen $G = (V, E, c)$ an.

- $V = \{u, v, w_1, w_2, \ldots, w_k\}$
- $E = \{\{u, v\}\} \cup \{\{u, w_i\} \mid i = 1, \ldots, k\} \cup \{\{v, w_i\} \mid i = 1, \ldots, k\}$
- $c(e) = 1$ für alle $e \in E$

Aufgabe 4-6:

Berechnen Sie einen minimalen Spannbaum nach Prims Algorithmus zu dem Graphen aus Abbildung 2.

- Geben Sie den Inhalt der Datenstruktur Q an, in dem die noch zu bearbeitenden Knoten mit Ihren Werten stehen, immer nachdem ein Knoten vollständig bearbeitet wurde.
- Bei gleichen Werten soll in lexikographischer Reihenfolge der Bezeichner der Knoten vorgegangen werden.
- Tragen Sie die Werte und die Zielknoten an allen Knoten in eine Tabelle ein, immer nachdem ein Knoten vollständig bearbeitet wurde.
- Tragen Sie zusätzlich die Werte und die Zielknoten der Lösung an allen Knoten in die Abbildung ein und markieren Sie die Kanten farblich, die zum minimalen Spannbaum gehören.
- Startknoten ist Knoten a.

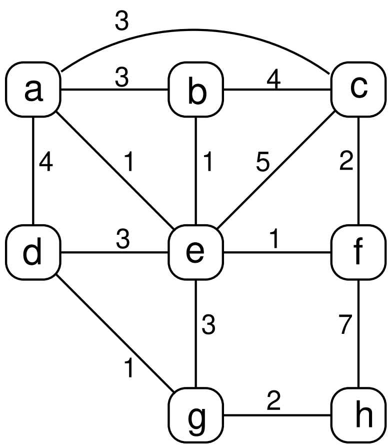

Abbildung 2: Spannbaum

Aufgabe 4-7:

Erweitern Sie den Algorithmus Breitensuche so, dass in ungewichteten Graphen das Single-Source-Shortest-Path-Problem gelöst wird. In einem ungewichteten Graphen ist die Länge eines Weges durch die Anzahl der Kanten definiert, die auf dem Weg liegen. Oder anders gesagt: Das Gewicht jeder Kante ist eins.

Berechnen Sie mittels der modifizierten Breitensuche für den Graphen aus Abbildung 1 die kürzesten Wege vom Startknoten a aus.

- Geben Sie immer, nachdem Sie einen vorher unbesuchten Knoten besucht haben, die Kanten an, die in der Datenstruktur des Algorithmus zur Bearbeitung stehen.
- Die von einem besuchten Knoten ausgehenden Kanten sollen in lexikographischer Reihenfolge der Bezeichner ihrer Endknoten in die Datenstruktur eingetragen werden.
- Geben Sie in einer Tabelle nach jedem Besuch eines Knotens die Werte des Vorgängers und die Entfernung des Knotens vom Startknoten an.
- Tragen Sie zusätzlich die Werte der Lösung an allen Knoten in die Abbildung ein und markieren Sie die Kanten farblich, die zu den kürzesten Wegen gehören.

Aufgabe 4-8:

Berechnen Sie mittels des Dijkstra-Algorithmus die kürzesten Wege vom Startknoten a aus für den Graphen in Abbildung 3.

- Geben Sie wieder den Inhalt der Datenstruktur Q an, in dem die noch zu bearbeitenden Knoten mit Ihren Werten stehen, immer nachdem ein Knoten vollständig bearbeitet wurde.
- Bei gleichen Werten soll in lexikographischer Reihenfolge der Bezeichner der Knoten vorgegangen werden.
- Tragen Sie die Werte und die Zielknoten an allen Knoten in eine Tabelle ein, immer nachdem ein Knoten vollständig bearbeitet wurde.
- Tragen Sie zusätzlich die Werte und die Zielknoten der Lösung an allen Knoten in der unteren Abbildung ein und markieren Sie die Kanten farblich, die zum minimalen Spannbaum gehören.

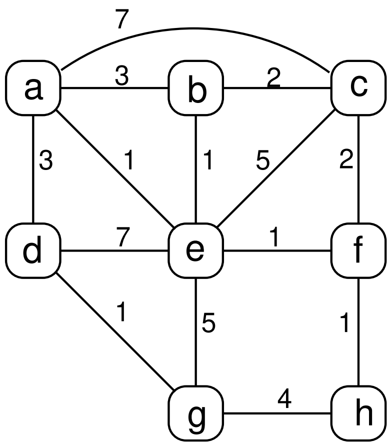

Abbildung 3: Kürzeste Wege